

Planche n° 33. Le groupe symétrique

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 : (**IT)

Soit σ l'élément de S_{12} : $\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11)$.

- 1) Combien σ possède-t-elle d'inversions ? Que vaut sa signature ?
- 2) Décomposer σ en produit de transpositions. Retrouvez sa signature.
- 3) Déterminer les orbites de σ .
- 4) Déterminer σ^{2015} .

Exercice n° 2 : (**T)

Démontrer que S_n est engendré par $\tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \dots, \tau_{1,n}$.

Exercice n° 3 : (***T)

Démontrer que A_n est engendré par les cycles de longueur 3 (pour $n \geq 3$).

Exercice n° 4 : (***T)

Démontrer que S_n est engendré par $\tau_{1,2}$ et le cycle $(2\ 3 \dots n\ 1)$.

Exercice n° 5 : (***)

Définition : Soient $(G, *)$ et $(G', *')$ deux groupes. On dit que ces groupes sont isomorphes si et seulement si il existe une application bijective f de G sur G' telle que : $\forall (x, y) \in G^2, f(x * y) = f(x) *' f(y)$ (f est alors un isomorphisme du groupe $(G, *)$ sur le groupe $(G', *')$).

Soit (G, \times) un groupe. Montrer que (G, \times) est isomorphe à un sous-groupe de $(S(G), \circ)$ et que, en particulier, tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n (théorème de CAYLEY). (Indication : montrer que pour chaque x de G , l'application $y \mapsto xy$ est une permutation de G .)

Exercice n° 6 : (***)

Soit σ une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et k le nombre d'orbites de σ . Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$.

Exercice n° 7 : (***I)

σ étant une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ donnée, on définit la matrice notée P_σ , carrée d'ordre n dont le terme ligne i colonne j est $\delta_{i, \sigma(j)}$ (où $\delta_{i,j}$ est le symbole de KRONECKER). On note G l'ensemble des P_σ où σ décrit S_n .

- 1) a) σ et σ' étant deux éléments de S_n , calculer $P_\sigma \times P_{\sigma'}$.
b) En déduire que (G, \times) est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$, isomorphe à (S_n, \circ) (la définition de deux groupes isomorphes a été donnée dans l'exercice n° 5). Les matrices P_σ sont appelées « matrices de permutation ».
- 2) (Une utilisation des P_σ) A étant une matrice carrée donnée, calculer AP_σ et $P_\sigma A$. Que constate-t-on ?

Exercice n° 8 : (***I)

A_1, A_2, \dots, A_p sont p matrices carrées d'ordre n , deux à deux distinctes et inversibles. On suppose que $\{A_1, \dots, A_p\}$ est stable pour \times . Montrer que $\{A_1, \dots, A_p\}$ est un sous groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ (on utilisera le résultat suivant démontré dans le chapitre dénombrement : si f est une application injective d'un ensemble E dans un ensemble F et si E et F sont deux ensembles finis ayant le même nombre d'éléments, alors f est bijective).

Exercice n° 9 : (***)

Dans $E = \mathbb{R}^n$, on considère l'hyperplan H d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$ dans la base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E . Pour $\sigma \in S_n$ donnée, on considère l'endomorphisme f_σ de E défini par : $\forall i \in E, f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

On pose alors $p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$. Montrer que p est une projection dont on déterminera l'image et la direction.